La matematica di Piero della Francesca

di Enrico Gamba
Vico Montebelli
Pierluigi Piccinetti

Considerando l'opera di Piero della Francesca nel suo complesso, è naturale chiedersi se Piero sia stato un sommo pittore, che si intendeva anche di cose matematiche, o un grandissimo matematico che riuscì a diventare altrettanto grande nella pittura? È palese il carattere fittizio di questa alternativa, che tuttavia porta ad evidenziare come, nell'avventura creativa di Piero, Matematica e pittura ottengano pari considerazione, sia come sforzi, sia come risultati raggiunti.

Il fatto che Piero *matematico* abbia ottenuto finora scarsa fama è in parte "colpa" di Piero stesso. Le tre opere manoscritte che ci ha lasciato – il *Trattato d'abaco*, il *De prospectiva pingendi*, il *Libellus de quinque corporibus regularibus* – non sono particolarmente accattivanti. Il *Trattato d'abaco* è una successione di 574 proposizioni che risolvono per via algebrica problemi aritmetici e geometrici. Un discorso molto simile vale per le 140 proposizioni che compongono il *Libellus*. Chi poi si attende di trovare nel *De prospectiva pingendi* un Piero che illustra la propria arte – qualcosa di simile al *De pictura* di Leon Battista Alberti – rimane invariabilmente deluso. In definitiva, Piero si propone come un vero e proprio matematico, intento alle proprie ricerche.

In questo articolo esamineremo i temi matematici più importanti tra quelli reperiti nelle opere (appena citate) del nostro autore. Una scelta che pecca di schematismo, ma che si giustifica per la mancanza a tutt'oggi di uno studio sufficientemente complessivo e comprensivo della Matematica quattrocentesca.

Gli autori

Enrico Gamba è fisico e storico della scienza. Insieme a Montebelli, è membro della Commissione per l'Edizione Nazionale delle opere di Piero della Francesca.

Vico Montebelli insegna Matematica applicata presso l'Istituto Tecnico Commerciale di Fano ed è docente a contratto di Statistica presso il corso di laurea in Biotecnologie dell'Università di Studi di Urbino.

Pierluigi Piccinetti, docente di Disegno e di Storia dell'arte nei Licei, è l'autore dei disegni e dei modelli.

Il volume della volta a padiglione

Nel *Libellus de quinque corporibus regularibus, Tractatus quartus,* caso X, Piero affronta il problema di calcolare il volume dell'intersezione di due cilindri di diametro 4 fra loro perpendicolari [1]. Tale volume risulta il doppio di quello di una volta a padiglione, che tuttavia Piero non nomina (figg. 1 e 2)[2].

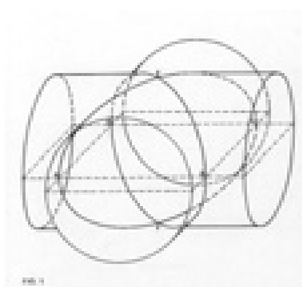

Fig. 1

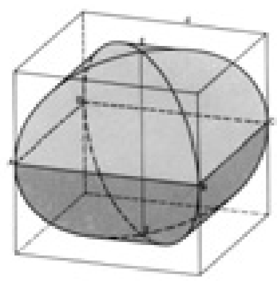

Fig. 2

Il nostro risolve il problema con la formula: $V=2/3d^3$, dove d è il diametro comune dei due cilindri ed anche lo spigolo del cubo circoscritto al solido. Infatti, Piero eleva al cubo 4; lo divide per 3 e moltiplica il risultato per 2 ottenendo

64/3=21+1/3; (21+1/3)2=42+2/3. Il volume della volta a padiglione è allora 21+1/3.
Contrariamente al costume abachistico di privilegiare i risultati e il procedimento risolutivo piuttosto che le loro giustificazioni teoriche, Piero si sofferma su come ha ottenuto la "formula". Considera il quadrato ABCD di lato 4, pari al diametro del cilindro, il cerchio in essa inscritto KILM e il triangolo KLM (fig. 3). Poi, il rettangolo TVXY che ha per lati VX = 4 e TV uguale alla diagonale AC del quadrato ABCD (fig.4).

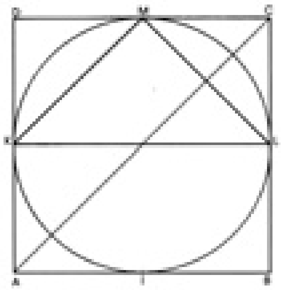

Fig. 3

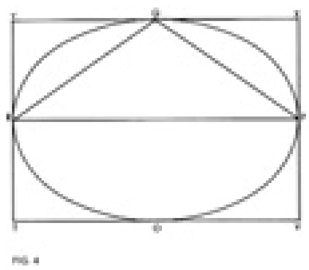

Fig. 4

Tale rettangolo è circoscritto all'ellisse OPQR che Piero chiama "*circulum proportionabilem",* che a sua volta circoscrive il triangolo RPQ. In base alla "*quintam tertii Archimedis De Conoidalibus"* enuncia la validità delle due seguenti relazioni [3]:

Area(ABCD) : Area(TVXY) = Area (cerchio) : Area(ellisse)
Area(cerchio) : Area(ABCD) = Area(ellisse) : Area(TVXY)

Enuncia inoltre senza dimostrarle le altre due seguenti relazioni [4]:

Area(KLM) : Area(RPQ) = Area(ABCD) : Area(TVXY)
Area(KLM) : Area(ABCD) = Area(RPQ) : Area(TVXY)

Dalle precedenti deduce la proporzione [5]:

Area(KLM) : Area(cerchio) = Area(RPQ) : Area(ellisse)

C'è da osservare – è facile dimostrarlo – che tutte le relazioni precedenti valgono anche se il rettangolo TVXY ha dimensioni a e b qualunque (non necessariamente uguali al lato del quadrato e alla sua diagonale).
Piero considera poi le seguenti quattro figure solide che fa, in qualche modo, "corrispondere" alle figure piane considerate prima:
la sfera EKFL di diametro EF inscritta nel solido intersezione dei due cilindri che "corrisponde" al cerchio KILM inscritto nel quadrato (fig. 5);
il solido intersezione dei due cilindri che "corrisponde" all'ellisse (fig. 2);
il cono di base il cerchio KILM e vertice E, inscritto nella sfera, che "corrisponde" al triangolo KLM prima considerato (fig. 6);
la piramide di vertice E e base ABCD, inscritta nella doppia volta, che "corrisponde" al triangolo RPQ (fig.7).

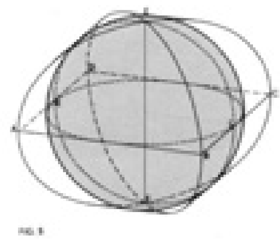

Fig. 5

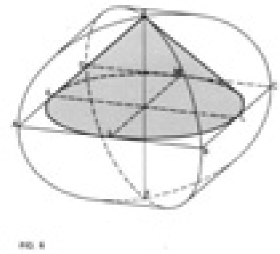

Fig. 6

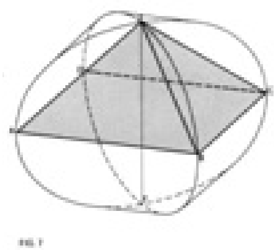

Fig. 7

Piero generalizza a queste figure solide, senza giustificazione alcuna, la relazione (5) considerata fra le figure piane, arrivando alla seguente conclusione:

Volume(piramide) : Volume(doppia volta) = Volume(cono) : Volume(sfera)

Per la "*XXXIII^{am} primi Sperae et Coni Archimedis*", il volume della sfera è quadruplo del volume del cono inscritto nella semisfera, per cui il volume della doppia volta a padiglione è quadruplo del volume della piramide. Quindi, detto d il diametro del cilindro, risulta $V=4(1/3d^2\cdot d/2)=4/6d^3=2/3d^3$.

La correttezza della formula si può verificare con il calcolo integrale. Basta osservare che, tagliando la doppia volta con piani α paralleli al piano ABCD, come indicato in fig. 8, si ottengono come sezioni dei quadrati i cui vertici variano sulle due costole ellittiche AECF e EBFD. La somma di tutti questi quadrati dà il volume del nostro solido. Tali piani tagliano la sfera inscritta nella doppia volta secondo dei cerchi inscritti nei suddetti quadrati. Indicando con x la distanza del piano sezione dal punto E, con y il raggio del cerchio sezione (fig. 9) e con r il raggio della sfera, si ha (per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo EFG) che $y=\sqrt{x(2r-x)}$; per cui l'area del quadrato sezione è $(2y)^2=4x(2r-x)$. Allora il volume della doppia volta è $V=\int_0^{2r}4x(2r-$

$x)dx=16/3r^3=2/3d^3$.
Si poteva semplicemente anche notare (operando un'integrazione informale) che, essendo l'area del quadrato $4/\pi$ volte l'area del cerchio inscritto, il volume della doppia volta è $4/\pi$ il volume della sfera inscritta, per cui $V=4/\pi \cdot 4/3\pi r^3=16/3r^3=2/3d^3$.

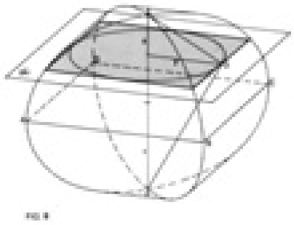

Fig. 8

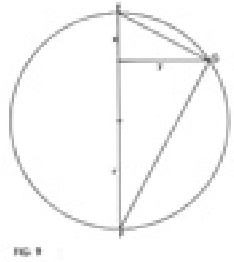

Fig. 9

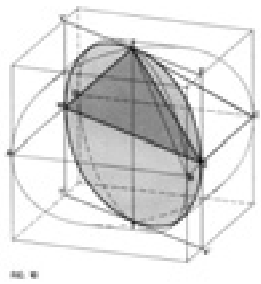

Fig. 10

Il problema è di fare un'ipotesi plausibile su come Piero sia arrivato alla relazione (6). Sezionando la doppia volta con un piano qualsiasi passante per l'asse EF (fig. 10), si ottiene come sezione un'ellisse di asse minore EF e asse maggiore variabile, i cui estremi Z e W scorrono lungo il contorno del quadrato ABCD. Infatti, il piano taglia la doppia volta su due vele opposte che fanno parte dello stesso cilindro le cui sezioni piane sono ellittiche. Tale piano interseca il cubo circoscritto al solido secondo un rettangolo T'V'X'Y' circoscritto all'ellisse, la piramide di vertice E e base ABCD secondo il triangolo EWZ inscritto nell'ellisse. Al variare del piano nel fascio di asse EF la regione piana delimitata dall'ellisse descrive il solido intersezione dei due cilindri.
Il piano del fascio taglia inoltre la sfera (fig. 11) secondo un cerchio EK'FL' (uguale al cerchio KILM della figura 3) inscritto nel quadrato A'B'C'D' di lato d, il cono secondo il triangolo EK'L' (uguale al triangolo KLM della figura 3).
Nel caso particolare in cui il piano sezione sia il piano diagonale γ passante per la costola ellittica AECF (fig. 12), il cubo, il solido e la piramide vengono sezionati rispettivamente secondo il rettangolo TVXY, l'ellisse OPQR e il triangolo RPQ della figura 4. La figura 13 rappresenta la sezione determinata dal piano γ in cui sono rappresentate le figure piane considerate da Piero (figg. 3 e 4)
Preso quindi un piano generico del fascio di asse EF, esso determina come sezioni il triangolo EK'L', il cerchio EK'FL', il triangolo EWZ e l'ellisse EWFZ (fig. 14) fra le quali vale la relazione (5): Area(EK'L'):Area(cerchio)= Area(EWZ):Area(ellisse).
Forse, Piero ha pensato – giustamente – che tale proporzione restasse valida anche per le figure solide di cui quelle piane sono sezione, cioè: Volume(cono):Volume(sfera)=Volume(piramide):Volume(doppia volta), che è appunto la relazione (6).

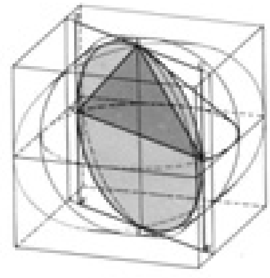

Fig. 11

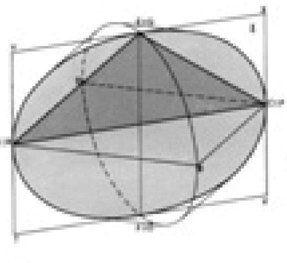

Fig. 12

Rimane il problema storico di capire se Piero si sia ispirato a qualche fonte.
Il problema di calcolare il volume del solido intersezione di due cilindri fra loro perpendicolari è stato enunciato e dimostrato da Archimede nel suo *Metodo*. Ce lo dice lo stesso Archimede nella lettera dedicatoria a Eratostene. Scrive di avergli precedentemente inviato gli enunciati di alcuni teoremi da lui scoperti (fra cui il nostro), invitandolo a trovare la dimostrazione, e che ora dimostra nel trattato [6]. Sappiamo che *Il Metodo* è rimasto per secoli sconosciuto ed è venuto alla luce solo nel 1907 ad opera di Heiberg, ma purtroppo la dimostrazione del teorema è andata perduta. Anche nella *Metrica* di Erone Alessandrino è ricordata la proposizione di Archimede ma la dimostrazione non è riportata [7]. Ad oggi non abbiamo nessuna prova che *Il Metodo* di Archimede fosse noto ai tempi di Piero – né la *Metrica* di Erone – per cui non abbiamo alcuna evidenza circa la possibile fonte cui Piero può avere attinto. Certamente, il tema delle volte era oggetto di discussione fra gli architetti di allora. Lo stesso Leon Battista Alberti dedica alle volte il capitolo XIV del libro III del *De re aedificatoria*, anche se da un punto di vista architettonico-costruttivo piuttosto che matematico [8].

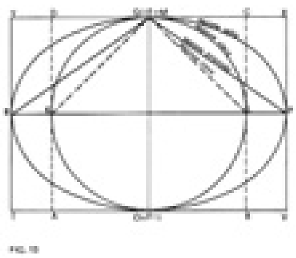

Fig. 13

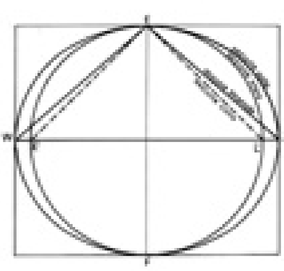

Fig. 14

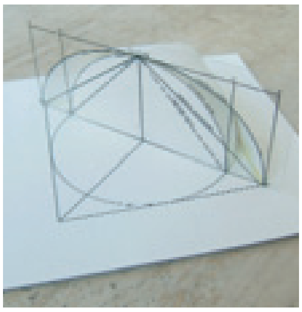

Fig. 13 Modello

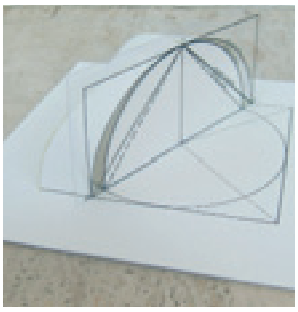

Fig. 14 Modello

I due modelli in figura realizzano in tre dimensioni quanto rappresentato nelle figg.13b (mod.1) e 14b (mod. 2) sotto forma bidimensionale. Il mod. 1 si riferisce alla sezione della volta a padiglione fatta secondo un piano passante per l'asse verticale EF della volta e per la diagonale del quadrato di base. Il mod. 2 si riferisce ad una sezione ottenuta con un piano qualsiasi passante con l'asse EF. I modelli visualizzano anche le sezioni della sfera, del cono e della piramide inseriti nella volta a padiglione di cui Piero si avvale per calcolarne il volume. Si può avanzare l'ipotesi che Piero abbia effettivamente costruito tali modelli come supporto visivo per la risoluzione del problema, è nota infatti la realizzazione all'epoca di modelli dei poliedri.

La superficie della volta a crociera

Nel *Libellus de quinque corporibus regularibus, Tractatus quartus,* caso XI, Piero affronta il problema di calcolare la superficie di una volta a crociera alta 4 e i cui archi hanno diametro 8.[9]

Piero osserva giustamente che detta superficie si ottiene togliendo dalla superficie di un cilindro di raggio 4 e altezza 8 la superficie della volta a padiglione (fig. 15). Infatti presa la volta a botte AR'BDS'C (fig. 16) e tolte le due vele della volta a padiglione ADE e BCE, restano le due unghie della volta a crociera. Considerando l'intero cilindro (doppio della volta a botte) le vele sono 4, e quindi resta l'equivalente dell'intera volta a crociera.

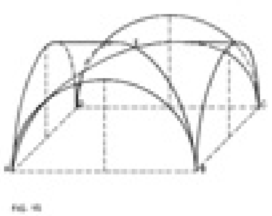

Fig. 15

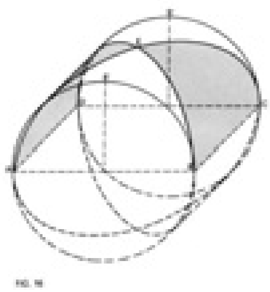

Fig. 16

Dalla relazione (6) del caso precedente, essendo il volume della sfera quadruplo di quello del cono inscritto nella semisfera, il volume della doppia volta a padiglione è quadruplo di quello della piramide di vertice E e base ABCD; quindi il volume della volta a padiglione è doppia del volume della detta piramide.

Piero calcola il volume della piramide che risulta 85+1/3, quindi il volume della volta a padiglione è 2(85+1/3)=170+2/3. Per passare dal volume della volta a padiglione V_p alla sua superficie S_p, moltiplica per 3 il volume e divide il risultato per il raggio del cilindro r = 4, utilizzando cioè la relazione $S_p=3/rV_p$ (7) senza dare alcuna giustificazione. Si può ipotizzare che, indicando con V e S il volume e la superficie della semisfera di raggio r, Piero assuma la seguente relazione: $V/S=V_p/S_p$ (8); ma essendo $V/S=r/3$ ne segue che $V_p/S_p=r/3$ cioè $S_p=3/rV_p$ che è la formula di calcolo da lui usata. La superficie della volta a padiglione risulta quindi (170+2/3)3/4=128, che tolto dalla superficie del cilindro di raggio 4 e altezza 8 che è uguale a 201+1/7, dà come risultato per la superficie della volta a crociera 73+1/7.

Si può tentare di dare una giustificazione all'ipotesi (8) facendo la considerazione seguente: si è già detto che tagliando la volta a padiglione con piani paralleli al piano ABCD (fig. 8) si ottengono come sezioni dei quadrati i cui vertici variano sulle due costole semiellittiche AEC e DEB, tali piani tagliano la semisfera inscritta nella volta secondo dei cerchi inscritti nei suddetti quadrati. La somma di tutti questi quadrati dà il volume della volta a padiglione e i loro contorni descrivono la superficie della volta, la somma dei cerchi descrive la sfera e le circonferenza la superficie sferica. Per ogni sezione piana vale la seguente relazione:

Area (quadrato): perimetro(quadrato) = Area(cerchio) : perimetro(circonferenza)[10].

Fig. 17

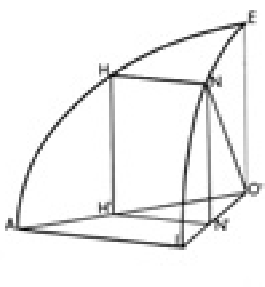

Fig. 18

È ragionevole allora supporre che la stessa relazione valga per i solidi e le loro superfici che generano tali sezioni, cioè la relazione (8). Comunque la formula di calcolo (7) è corretta come si può facilmente dimostrare ricorrendo al calcolo integrale.La superficie della volta a padiglione risulta 8 volte la superficie della semivelaunghia AEI (fig. 17). EI è 1/4 di circonferenza (fig. 18) quindi EI = $\frac{\pi}{2}r$; sia HN un ge-

nerico segmento orizzontale con gli estremi in EA e in EI; sia H'N' la sua proiezione sul piano, precisamente H' la proiezione di H sulla diagonale O'A e N' la proiezione di N su O'I. Considerato che l'angolo AO'I = 45°, sarà H'N'= O'N'. O'N= r , l'angolo NO'I in radianti misura $\frac{s}{r}$ dove s è l'arco NI.
Risulta O'N'= O'N $\cos\frac{s}{r} = r\cos\frac{s}{r}$ quindi HN = $r\cos\frac{s}{r}$
La superficie AEI è $HNds = r\cos\frac{s}{r}ds = r^2$. La superficie della volta a padiglione è allora $S_p=8r^2$. Come si è visto il volume è $V_p=8/3r^3$, quindi il rapporto fra la superficie e il volume è $\frac{S_p}{V_p} = \frac{8r^2}{8r^3/3} = \frac{3}{r}$ e $S_p = \frac{3}{r}V_p$, cioè la (7).
Generalizzando, in formalismo moderno, il procedimento di Piero si ottiene:
S(volta a crociera) = S(cilindro)-S(volta a padiglione)
S(cilindro) = $4\pi r^2$
S(volta a padiglione) = quindi S(volta a crociera) = $4\pi r^2-8r^2 = 4r^2(\pi-2)$

La risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo

L'algebra è talmente presente nel *Trattato d'abaco*, non solo come argomento a se stante, ma come metodo risolutivo dei problemi posti – circa il 55% dei problemi è risolto per via algebrica – che il trattato d'abaco meriterebbe il sottotitolo di *Trattato d'algebra*.
Piero non si limita ad affrontare equazioni la cui conoscenza era ormai consolidata da tempo (come le equazioni di 1° e di 2° grado e quelle di grado superiore al 2°, binomie e biquadratiche) ma si cimenta anche nelle equazioni di 3° grado e di grado superiore complete, che costituivano allora un campo di ricerca avanzata. Sappiamo che la loro risoluzione definitiva fu raggiunta solo più tardi nel corso del Cinquecento, ad opera degli algebristi italiani Scipione del Ferro, Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano e Ludovico Ferrari. Non stupisce quindi il fatto che alcuni suoi risultati siano clamorosamente errati mentre altri suscitino un certo interesse matematico e abbiano una certa rilevanza.
Fra gli errori, dobbiamo mettere le soluzioni delle equazioni che con simbolismo moderno possiamo rappresentare nella forma $ax^3=bx+c$; $ax^3=bx^2+c$; $ax^3=bx^2+cx+d$ che vengono risolte come se fossero di 2° grado [11].
Con le formule date per risolvere queste equazioni, Piero affronta tre problemi senza accorgersi che le soluzioni trovate non sono corrette [12]. Il fatto insolito è che non esegue quella prova che pure, in ambito abachistico, rappresentava un'abitudine ed era considerata elemento probante della bontà del procedimento seguito. È abbastanza sospetto il fatto che le stesse formule errate, applicate agli stessi problemi, espressi con parole quasi identiche, si ritrovino nel codice L. IX 28 della Biblioteca Comunale di Siena scritto da Maestro Gilio nel 1384 [13], nel *Libro di ragioni* scritto dal fiorentino Paolo Gerardi o Gherardi nel 1328 [14] e in altre opere più vicine ai tempi di Piero come quelle di Matteo di Nicolò Cerretani, *Libro dirittamente di ragioni* (1461) [15], Mariotto di Giovanni Guiducci *Libro d'Arismetrica* (1465) [16]. È probabile che Piero abbia avuto sottomano questi testi, o almeno altri che riportavano brani di questi e che si sia limitato acriticamente a ricopiarle, secondo un costume in verità abbastanza diffuso presso gli abachisti.
Altri autori dimostrano invece un ben diverso rigore. Maestro Benedetto da Firenze (1463) si dimostra consapevole della precarietà di certe ricerche sulle equazioni di grado superiore al 2°: "certe aguagliationi le quali antichamente sopra e chubi davano, si potrebbono scrivere ma sono reghole molto ofuscate" [17]. Luca Pacioli, nella *Summa de aritmetica, Geometria, Proporzioni e proporzionalità*, non riporta le formule risolutive delle equazioni di grado superiore al secondo perché considera il problema non risolto:" ma de numero cosa e cubo fra loro siando composti, over de numero censo e cubo, over de numero cubo e censo de censo, non se possuto finora troppo bene formare regole generali (…) se non ale volte a tastoni (…) in qualche caso particolare" [18].
Più interessanti sono invece le soluzioni date da Piero alle seguenti equazioni [19]:

(1) $ax+bx^2+cx^3=d \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\frac{d}{c}}-\frac{a}{b}$

(2) $ax+bx^2+cx^3+dx^4=e \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{e}{d}}-\sqrt{\frac{a}{c}}$

(3) $ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5=f \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[5]{\frac{b}{d}\frac{c}{e}+\frac{f}{e}}-\sqrt[3]{\frac{a}{d}}$

(4) $ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6=g \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[6]{\left(\frac{b}{d}\right)^2+\frac{g}{f}}-\sqrt[4]{\frac{c}{f}}$

Come regole generali, queste formule sono errate. Fra l'altro, nelle formule della seconda e della quarta equazione, non compaiono neppure tutti i coefficienti e questa è una condizione necessaria, anche se non sufficiente, perché una formula risolutiva di un'equazione sia corretta. Tuttavia, le formule risolvono correttamente tre problemi particolari posti da Piero (della quarta equazione Piero non dà alcuna applicazione) [20]:

calcolare a quale tasso unitario mensile, espresso in denari per Libra al mese, un capitale di 100 Libre danno in 3 anni un montante di 150 Libre;

Un centro studi sulla prospettiva a Urbino

Il 28 ottobre 2005, si è costituito a Urbino il *Centro Internazionale di Studi "Urbino e la Prospettiva"* con il patrocinio della locale Università degli Studi "Carlo Bo", dell'Accademia Raffaello, dell'Amministrazione Comunale di Urbino, la Fondazione Cassa di Risparmio di Pesaro, il Centro Pristem, la Facoltà di Architettura "Valle Giulia" di Roma-Sapienza, la biblioteca Oechslin di Einsiedeln oltre all'appassionato contributo di un gruppo di studiosi: storici dell'arte, matematici, architetti, ingegneri, fisici e informatici.
Il Centro Studi intende promuovere ricerche, organizzare convegni e mostre, diffondere testi antichi e moderni, allo scopo di far conoscere, apprezzare e valorizzare i personaggi e le opere che hanno dato luogo a quel connubio fra scienze matematiche e arte, che ha caratterizzato il Rinascimento, e le ripercussioni che questo ha avuto sulla cultura moderna. Rocco Sinisgalli è stato il principale ispiratore dell'idea di formare a Urbino questo centro studi.

Ma perché a Urbino? Perché dalla seconda metà del Quattrocento, fino alla prima metà del Seicento, il ducato di Urbino è stato la sede di un vasto dibattito artistico, tecnico e scientifico, che lo ha reso un riferimento culturale unico al mondo. Una della componenti più interessanti di questo fermento culturale sono gli studi dedicati alla prospettiva, cioè le ricerche collegate al problema di rappresentare su una superficie bidimensionale oggetti e paesaggi tridimensionali, nel duplice aspetto matematico e artistico. La prospettiva va anche considerata come esempio di applicazione della Matematica alle tecniche, ossia alla cartografia, all'architettura e alla meccanica (si pensi agli orologi solari e agli strumenti prospettici).
Alcuni fondamentali risultati sulla Geometria della visione erano già contenuti nell'*Ottica* di *Euclide*, che costituì la base matematica di alcuni trattati in epoca romana (tra cui spiccano le opere di *Vitruvio*, architetto dell'età augustea) e medievale, con le opere di *Tolomeo* (II secolo d.C.). Ma il vero salto di qualità avviene nel Rinascimento. Dopo gli studi empirici di Brunelleschi (1377-1445) e Masaccio (1401-1429), nel 1435 *Leon Battista Alberti* (più volte ospite a Urbino del duca Federico da Montefeltro) pubblica il *De Pictura* che contiene una prima trattazione teorica della prospettiva. L'ossatura geometrica di questa opera appare ancora legata a un certo empirismo e presenta soprattutto delle procedure pratiche per costruire la prospettiva. Questo limite viene superato da *Piero della Francesca* (1416?-1492) che, nello stimolante centro culturale creato a Urbino dal mecenatismo di Federico da Montefeltro, alterna studi di Matematica e di arte. È proprio Piero che riesce per primo a spingere lo studio della prospettiva lungo i binari della codificazione rigorosa e matematica. Nel 1475 compone il *De Prospectiva Pingendi,* opera dedicata al duca Federico, che rappresenta il primo trattato in cui sono esposti in modo matematicamente rigoroso i fondamenti geometrici della prospettiva.
Il vero distacco tra lo studio della prospettiva finalizzata alla

calcolare a quale tasso unitario mensile, espresso in denari per Libra al mese, 100 Libre iniziali danno in 4 anni 160 Libre;
calcolare a quale tasso unitario mensile, espresso in denari per Libra al mese, 100.000 Libre iniziali danno in 5 anni 161.051 Libre.

La formula (4), anche se non applicata a nessun problema, sarebbe utile e corretta, per risolvere un problema di capitalizzazione relativo a 6 anni. Le formule precedenti, in ogni caso, non risolvono solo quei particolari problemi numerici ma tutta la classe di problemi che si ottengono cambiando i dati specifici. Piero non fa queste considerazioni. Assegna le formule come soluzioni generali delle equazioni, o almeno le presenta come tali, e non come risolutive solo di quei problemi. In ciò sbaglia. Altri si comportano in modo più rigoroso come, per esempio, il maestro Dardi di Pisa (sec XIV) che, nell'*Aliabraa Argibra* [21], dice esplicitamente che le regole usate valgono limitatamente ai problemi risolti.
Il problema di calcolare a quale tasso d'interesse mensile un certo capitale dà un certo montante è un classico. Si trova già nel *Liber Abaci* (1202) [22] di Leonardo Pisano limitatamente al tempo di 3 anni. Lo si ritrova, limitatamente al caso di 3 e 4 anni, nel già citato libro di maestro Dardi [23] e, come detto, con le stesse parole nei libri di Nicolò Cerretani e Giovanni Guiducci [24]. Anche Luca Pacioli ne tratta nella *Summa*. Finora, invece, le formule date da Piero relative alla capitalizzazione per 5 e 6 anni non sono state trovate in nessun altro autore per cui debbono (per il momento) essere riconosciute a Piero, come suo risultato originale.
Prendiamo in considerazione il primo problema che consiste nel calcolare a quale tasso unitario mensile, espresso in denari per Libra al mese, 100 Libre iniziali danno in 3 anni 150 Libre. Oggi lo risolveremmo nel modo seguente: sia x l'interesse espresso in denari prodotto di 1 Libra al mese; in 1 anno 1 Libra rende 12 x denari; considerato che 1 soldo = 12 denari, in 1 anno 1 Libra rende x soldi e, visto

pittura e all'architettura, e la sua formalizzazione puramente matematica, viene fatta risalire a due studiosi: l'urbinate *Federigo Commadino* (1509-1575) e il suo grande allievo, il pesarese *Guidobaldo del Monte* (1545-1607). Commandino traduce le opere di Tolomeo sul planisfero e sugli orologi solari, corredandole di commenti e ampliamenti, che costituiscono la nascita dei moderni studi sulle proiezioni. Si occupa esplicitamente di prospettiva nel *Federici Commandini Urbinatis* e in *Ptolemaei Planisphaerium Commentarius* e viene chiamato *Restaurator Mathematicarum*, a tal punto che i suoi studi furono fonte di ispirazione anche per Halley e Newton.
Guidobaldo del Monte, matematico scrupoloso e rigoroso, oltre a occuparsi di Meccanica e di Astronomia, pubblica a Pesaro nel 1600 i *Perspectivae libri sex*, trattato pressoché esauriente dell'intera disciplina, in cui riesce a dimostrare in modo rigoroso molti dei metodi utilizzati empiricamente da pittori, architetti e ingegneri dell'epoca. Frequentando la corte di Urbino, Guidobaldo studiò la meccanica, la scenografia, inventò strumenti e stabilì contatti con Galileo, al quale fornì supporto finanziario e persino una "raccomandazione" per ottenere la cattedra all'Università di Padova nel 1592.
Il rigore matematico e artistico che si è sviluppato alla corte di Urbino ha creato le premesse per un nuovo orientamento nell'arte e nell'architettura e ha costituito terreno fertile per la formazione di tanti altri personaggi, tra cui spiccano l'insuperato pittore urbinate *Raffaello Sanzio* (1483-1520) e l'architetto *Donato Bramante* (1444-1514). Ma il Cinquecento è anche il secolo in cui nasce il nuovo teatro. La scena diventa il luogo deputato, quindi organizzato e disegnato, per dare una forte impressione spaziale. È la prospettiva accelerata alla quale Guidobaldo del Monte dedica la parte finale dei *Perspectivae libri sex*. In effetti, già dagli inizi del Cinquecento nel ducato di Urbino il teatro aveva esordito con allestimenti eccezionali realizzati tra l'altro dall'architetto *Girolamo Genga* (1476-1551).
Nel 1638, l'architetto pesarese *Nicolò Sabbatini* (1574-1654) pubblica la *Pratica di fabricar scene e machine ne' teatri*, primo trattato di scenotecnica dato alle stampe. Come prosecutore troviamo il fanese *Giacomo Torelli* (1604-1678) uno dei massimi esponenti della scenografia barocca europea.

In questo contesto, è evidente che gli obiettivi principali del *Centro Internazionale di Studi "Urbino e la Prospettiva"* sono anche il recupero e la conservazione della conoscenza e delle tecniche e la trasmissione delle opere che hanno caratterizzato la scuola scientifica sviluppatasi presso la corte di Urbino.
Le prime attività del Centro Studi includono l'organizzazione di un Convegno internazionale, dal titolo *L'arte della matematica nella prospettiva*, che si inaugurerà a Roma il 9 ottobre 2006 e proseguirà i lavori presso il Palazzo Ducale di Urbino il 10 e 11 ottobre, e un Convegno sulla figura di Guidobaldo del Monte, che si svolgerà a Urbino, nel giugno 2007 in occasione del quattrocentenario della morte.
Per ulteriori informazioni si può vedere il sito: *http://urbinoelaprospettiva.uniurb.it/.*

che 1 Libra = 20 soldi, in 1 anno 1 Libra rende $x/20$ Libre. Applicando allora la nota formula che esprime il montante composto, scriveremmo $100(1+x/20)^3$ da cui si ricava, dopo alcuni passaggi, $x = 20\sqrt[3]{1+1/2} - 20 = \sqrt[3]{12000} - 20$.

Tale modo di procedere è nella sostanza lo stesso che segue Leonardo Pisano nel *Liber Abaci* e Luca Pacioli nella *Summa* [25]. Luca pone il problema di calcolare per quale tasso d'interesse, espresso in denari per Libra al mese, 1000 fiorini danno come montante dopo 5 anni 2500 fiorini. Riprendendo nella sostanza Leonardo Pisano, osserva che la sequenza del capitale iniziale e dei 5 montanti successivi è una successione geometrica di ragione $q = 20\,(1+ x/20) = \sqrt[5]{2500/1000} = \sqrt[5]{2{,}5}$ dove x = l'interesse espresso in denari prodotto di 1 Libra al mese.
Ne segue che $x = 20\sqrt[5]{2{,}5} - 20 = \sqrt[5]{8.000.000} - 20$.
Piero e altri autori procedono in modo diverso. Non applicano il procedimento di Luca ma, partendo dal tasso unitario annuo di $x/20$ Libre, calcolano anno dopo anno il montante finale. Nel caso di C=100, M=150 e tempo 3 anni, si ha che alla fine del primo anno l'interesse prodotto da 100 Libre è $100x/20=5x$ Libre; il montante è quindi $M_1=(100+5x)$ Libre. Alla fine del secondo anno, l'interesse è $(100+5x)x/20=5x+x^2/4$; il montante M_2 è $100+5x+5x+x^2/4=100+10x+x^2/4$. Alla fine del terzo anno, l'interesse è $(100+10x+x^2/4)x/20=5x+x^2/2+x^3/80$; il montante M_3 è $x^3/80+3/4x^2+15x+100$. L'equazione è pertanto: $15x+3/4x^2+1/80x^3=50$ cioè $1200x+60x^2+x^3=4000$. La sua soluzione applicando la formula (1) di Piero, per a=1200, b=60, c=1 e d=4000 è $x = 20\sqrt[3]{(1200/60)^3+(4000/1)} - 1200/60 = \sqrt[3]{12000} - 20$, come deve essere.
Anche Luca, in un problema della *Summa*, accenna alla possibilità di procedere in questo modo ma lo sconsiglia vivamente: "Ma verresti in travagli e briga de capitoli ignoti"[26].
Come si diceva, la formula data da Piero è corretta per risolvere non solo il problema numerico dato ma quello ge-

nerale di trovare il tasso d'interesse per il quale un certo capitale C dà come montante M. Infatti si avrà $C(1+x/20)^3=M$ da cui $x=\sqrt[3]{8000M/C}-20$. Procedendo alla maniera di Piero, si perviene alla seguente equazione: $1200x+60x^2+x^3=8000\frac{M-C}{C}$. La soluzione da lui data è corretta: infatti,

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\frac{d}{c}}-\frac{a}{b}=\sqrt[3]{\left(\frac{1200}{60}\right)^3+8000\,\frac{M-C}{C}}-\frac{1200}{60}=$$

$$=\sqrt[3]{(20)^3+8000\,\frac{M}{C}-8000}-20=\sqrt[3]{8000\,\frac{M}{C}}-20.$$

Rimane aperto il problema – interessante dal punto di vista della storia dell'Algebra – di capire come abbiano fatto Piero e gli altri autori a trovare quelle formule per risolvere quei particolari problemi. Si può formulare l'ipotesi [27] che, a queste formule, si sia giunti confrontando l'equazione da risolvere con una soluzione trovata per altra via (per esempio quella indicata da Luca Pacioli che probabilmente riportava un metodo utilizzato al tempo) e quindi cercando di esprimere, per tentativi, la soluzione trovata in termini dei coefficienti dell'equazione.

Piero scrive l'equazione nella forma generale $ax+bx^2+cx^3=d$ e quindi $\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}x^2+x^3=\frac{d}{c}$. Si tratta di confrontarla con l'equazione trovata $1200x+60x^2+x^3=4000$ e scrivere la soluzione $x=\sqrt[3]{12000}-20$ in termini di a, b, c, d. Si osserva che: $20=1200/60=a/b$. Inoltre $12000=4000+8000=4000+20^3=$ $=4000+(1200/60)^3=d/c+(a/b)^3$.

Ne segue che la soluzione riferita ai coefficienti dell'equazione può essere scritta, come fa Piero, in termini di

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3+\frac{d}{c}}-\frac{a}{b}.$$

La considerazione ha carattere generale in quanto, risolvendo il problema di trovare il tasso x per il quale il capitale C dà dopo 3 anni il montante M, si perviene – come si è visto – all'equazione $1200x+60x^2+x^3=8000\frac{M-C}{C}$ la cui soluzione è $x=\sqrt[3]{8000M/C}-20$. Solo il termine noto dell'equazione dipende dai valori di M e di C per cui 20 è sempre uguale a $1200/60=a/b$; inoltre, $8000\frac{M-C}{C}=8000\frac{M}{C}-8000$ da cui $8000\frac{M}{C}=8000\frac{M-C}{C}+8000=d/c+(a/b)^3$.

Ne segue che la soluzione $x=\sqrt[3]{8000M/C}-20$, diventa $x=\sqrt[3]{8000M/C}-20$.

Le stesse considerazioni possono essere fatte per gli altri problemi di capitalizzazione per 4, 5 6, anni. In particolare per determinare il tasso x per cui C dopo 4 anni dà come montante M si perviene all'equazione seguente $32000x+$ $+24000x^2+80x+x^4=8000\frac{M-C}{C}$ la cui soluzione sappiamo essere, alla maniera moderna e di Luca, $x=\sqrt[4]{160000M/C}-20$. Confrontando l'equazione ottenuta con $ax+bx^2+cx^3+dx^4=e$, la soluzione può essere espressa in funzione dei coefficienti nel modo seguente: $20=\sqrt{32000/80}=\sqrt{a/c}$, inoltre $160000\frac{M-C}{C}=160000\frac{M}{C}-$ -160000 da cui $=160000\frac{M-C}{C}+160000=e/d+(a/c)^2$. Ne segue che $x=\sqrt[4]{160000M/C}-20$ diventa

$$x=\sqrt[4]{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{e}{d}}-\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Alcuni problemi di analisi indeterminata in Piero

Nell'ultima parte del *Trattato d'abaco* ci sono alcuni problemi di analisi indeterminata [28], in uno di essi Piero chiede: "Trovame un numero quadrato che tractone 7 remanga quadrato et giontoci 7 sia quadrato"[29]. In simboli moderni il problema equivale a trovare tre numeri razionali x^2, y^2, z^2 tali che sia soddisfatto il sistema seguente $\begin{cases} y^2-7=x^2 \\ y^2+7=z^2 \end{cases}$

Si tratta di un caso particolare di una questione generale trattata da Leonardo Pisano nel *Liber quadratorum*[30], nota come il problema della determinazione dei numeri congruenti x^2, y^2, z^2 del numero congruo c, esprimibile in termini moderni con il sistema $\begin{cases} y^2-c=x^2 \\ y^2+c=z^2 \end{cases}$

Il problema in generale è affrontato da Leonardo Pisano alla Prop. XI [31], i casi particolari per c = 5 e c = 7 costituiscono rispettivamente la prop. XIV[32] e la prop. XV[33].

Una versione volgare del *Liber quadratorum* è inserita nel codice Palatino 577 della Biblioteca Nazionale di Firenze databile attorno al 1464 ed attribuito a Maestro Benedetto da Firenze [34]. Alcuni problemi di analisi indeterminata di Leonardo si ritrovano anche nel codice L.IV.21 della Biblioteca degli Intronati di Siena datato 1463 attribuito sempre a Maestro Benedetto da Firenze e nella *Summa* di Luca Pacioli.

La proposizione affrontata da Piero è, nel codice Palatino, la VIII-2, c. 276 r-276v [35] ed è risolta con lo stesso procedimento usato da Piero anche se con parole diverse. Quasi con le stesse parole si trova anche nella *Summa* del Pacioli, f. 14 v.

Piero risolve la questione nel modo seguente, trovando solo una delle infinite soluzioni che ha il problema: "Cercha per li numeri a ventura trovati per 7 che si trova per 9 et per 16; hora montiplica 9 in sé fa 81, et 16 in sé fa 256, giogni insiemi fa 337, montiplicalo in sé fa 113569. Et 9 via 16 fa 144, et 16 e 9 fa 25, e 25 via 144 fa 3600, montiplicalo per 4 fa 14400; con lo quale parti 113569 ne vene 7 12769/14400, tanto è quel numero che tractone 7 è quadrato e gionto 7 è quadrato".

Il procedimento impiegato equivale ad applicare le seguenti formule trovate da Leonardo Pisano nel *Liber quadratorum* per determinare, al variare dei numeri interi e positivi a e b, le quaterne di numeri congruenti e congrui (x^2, y^2, z^2, c): $c = 4ab(b-a)(b+a)$; $x^2 = (b^2-a^2-2ab)^2$; $y^2 = (b^2+a^2)^2$; $z^2 = (b^2-a^2+2ab)^2$. Partendo da a = 9 e b =16 si trova: $c_1 = 7 \cdot 120^2 = 7 \cdot 14400$; $x_1^2 = 113^2 = 12769$; $y_1^2 = 337^2 = 113569$; $z_1^2 = 463^2$.

Sarà quindi $\begin{cases} 337^2 - 7 \cdot 120^2 = 113^2, \\ 337^2 + 7 \cdot 120^2 = 463^2 \end{cases}$

dividendo ambo i membri delle equazioni per 120^2 si ottiene

$$\begin{cases} (337/120)^2 - 7 = (113/120)^2, \\ (337/120)^2 + 7 = (463/120)^2 \end{cases}$$

quindi la terna $(113/120)^2$; $(337/120)^2=7+(12769/14400)^2$; $(463/120)^2$ dei numeri congruenti di 7 trovata da Piero.

Si può facilmente dimostrare che, applicando il procedimento visto sopra, a partire da $a = c_1= 7\cdot 120^2$ e $b = y_1^2 = 337^2$ si ottiene un'altra quaterna x_2^2, y_2^2, z_2^2, c_2 e quindi un'altra terna di congruenti di 7. Il procedimento è ricorsivo e si può ripetere ponendo successivamente $a = c_i$ e $b = y_i^2$ al variare di i fra i numeri naturali. Quindi il problema posto ammette infinite soluzioni razionali.

In un'altra proposizione del *Trattato d'abaco* Piero pone il problema di trovare tre numeri quadrati x^2, y^2, z^2 tali che la somma dei primi due sia un quadrato e la somma di tutti tre sia un quadrato[36]. In termini moderni si tratta di risolvere il seguente sistema . Piero assegna la soluzione $x^2 = 9$, $y^2 = 16$ e $z^2 = (9+16)(16/9) = (20/6)^2$ ma fa chiaramente intendere che di soluzioni se ne possono trovare infinite partendo da una qualunque terna pitagorica – diversa da 9, 16, 25 – e procedendo alla stessa maniera. Infatti se x^2, y^2 e a^2 è una terna pitagorica e quindi $x^2+y^2 = a^2$, allora definendo $z^2 = a^2 16/9$ risulta $x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1+16/9) = a^2(25/9) = (a5/3)^2$. Si sarebbe ugualmente risolto il problema se invece di moltiplicare per 16/9 avessimo moltiplicato per 9/16 oppure per i primi due numeri di una qualunque terna pitagorica.

Nella proposizione successiva [37] chiede di trovare quattro numeri quadrati x^2, y^2, z^2, w^2 che sommati a due a due, a tre a tre e a quattro a quattro diano un quadrato, cioè chiede di risolvere il sistema seguente $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ a^2 + z^2 = b^2 \\ b^2 + w^2 = c^2 \end{cases}$.

Piero estendendo il procedimento precedente trova la soluzione $x^2 = 9$, $y^2 = 16$, $z^2 = (20/3)^2$ e $w^2 = [9+16+(20/3)^2] (16/9) = (100/9)^2$. Anche questo problema ammette infinite soluzioni tante quante sono le terne pitagoriche da cui si parte.

Queste due ultime proposizioni si trovano nel *Liber Quadratorum,* prop. XIX [38], e nel Codice Palatino c. 287r-287v, III-1 e III-2 [39] ma sono risolte in modo diverso. Nella *Summa* sono risolte a f. 15 r e v, in modo diverso da Piero, ma equivalente alla risoluzione del Codice Palatino.

Procedimenti oscuri e insoliti

È tipico della matematica dell'abaco esporre i procedimenti risolutivi dei vari "casi" per via prescrittiva anziché dimostrativa. Dopo l'enunciato del problema, l'autore esordisce con la formula "fa così" seguita dall'elenco dei passaggi che conducono alla soluzione, rarissime volte accompagnato da una qualche spiegazione sui motivi del procedimento adottato. Compito del matematico abachista era d'indicare la via per raggiungere il risultato corretto, non di dimostrarla, al più eseguiva a posteriori la prova che il risultato ottenuto soddisfaceva i dati del problema.

Prendo come esempio la proposizione 8 del IV libro del *Libellus de quinque corporibus*. (fig. 19) Si tratta del triangolo di lati AB = 13, BC = 14, AC = 15 che ricorre lungo secoli nella matematica indiana, araba, occidentale, misure che danno 84 di area e 12 come altezza AE relativa al lato BC. Si fissa all'interno del triangolo un punto D con distanza 2 e 5 dai lati, si chiede di trovare il segmento HK passante per D dividente il triangolo in due parti equivalenti. Con una serie di passaggi Piero trova le seguenti misure: BE = 5, CE = 9, FG = 7 + 1/2, FM = 6, CG = 2 + 1/2 , DG = 6 + 1/4.

Viene ora la curiosità di sapere a cosa servano i segmenti DG e CG così laboriosamente cercati. Piero calcola il semiprodotto AC ? BC/2 = 105, lo divide per la misura di DG 6 + 1/4, ottenendo

6 + 4/5, nota infine che questo numero moltiplicato per 2 + 1/2 – la misura di CG – fa esattamente 42 cioè la metà dell'area del triangolo.

A questo punto procede alla divisione di 16 + 4/5 in due parti tali che il loro prodotto faccia 42, le due parti sono 8 + 2/5 ± √ (28 + 14/25), la parte maggiore 8 + 2/5 + √ (28 + 14/25) dichiara essere CH.

Perviene così a determinare HK lato del triangolo CHK di area 42. Come si vede il procedimento è tanto descritto in dettaglio, quanto privo di spiegazioni.

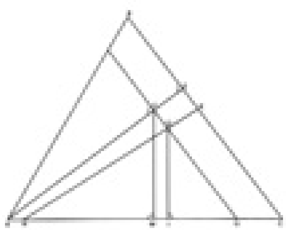

Fig. 19

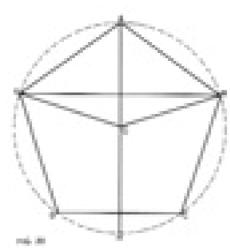

Fig. 20

È ovvio che dietro questi passaggi ci sono conoscenze e riferimenti precisi, ma è arduo dire quali siano, prendiamo un caso in cui possiamo gettare uno sguardo nel "retrobottega" di Piero. Nel XIV libro degli *Elementi* allora ritenuto di Euclide, si trova la seguente formula per il calcolo dell'area di un pentagono regolare: area = 3/4 AH ? 5/6 BE. (fig. 20)
Nella proposizione 36 del primo libro del *Libellus*, Piero propone un'altra formula con in più una punta di soddisfazione – "quod invenimus" –. La formula è, area = 5/8 AH ? BE. Un cambiamento trascurabile, una banale semplificazione, tuttavia forse Piero non la pensava così. Ci fornisce una traccia quel frate Luca Pacioli che nel 1509 all'interno della *Divina proportione* pubblica la versione volgare del *Libellus* senza chiarire la paternità dell'opera. Pacioli aggiunge alla formula una dimostrazione plausibilmente ripresa da Piero visto che, oltre ad esserne concittadino, era stato in parte allievo. Ecco il procedimento. Il prodotto AG ? BE dà l'area di 4 dei 5 triangoli in cui è diviso il pentagono, allora tenuta fissa la corda BE, per quale frazione del raggio AG devo moltiplicarla per avere l'area di 5 triangoli?
Ossia (AG ? BE) : 4 = (x ? BE) : 5, quindi x = 5/4 AG, x = 5/8 AH, il tutto da moltiplicare appunto per BE.
Intervengono due fattori, il primo è un'idea di dimostrazione esclusivamente geometrica, la semplificazione delle frazioni di cui si diceva sopra era ritenuta inadeguata nel senso che calcolava ma non dimostrava; il secondo che l'idea di dimostrazione stava in persone uscite dalla scuola dell'abaco, cioè con formazione marcatamente aritmetica, vedi l'uso della regola del tre. Lo sguardo nel "retrobottega" ci fa dubitare sulla veridicità delle nostre ricostruzioni, senza escludere che Piero abbia direttament

Aritmetica e prospettiva

Un'ulteriore evidenza della mentalità aritmetico-abachistica – di un ragionare per numeri su casi specifici – si trova nel *De prospectiva*, in un contesto che pure sembrerebbe dominio delle costruzioni geometriche. Già nella proposizione V, dopo aver illustrato una costruzione in generale, Piero non può fare a meno di passare ai numeri: "altramente faccia-se con numeri". Ancora, tra le proposizioni XI e XII, Piero inserisce una sostanziosa parte aritmetica introdotta con la significativa affermazione: "altramente per numeri, perché sia più chiara".
Piero cerca le leggi numeriche che legano le distanze degli oggetti dal punto di osservazione, alla riduzione delle loro dimensioni apparenti. Si tratta della classica costruzione del pavimento a mattonelle, che formava la base di riferimento della rappresentazione prospettica. La relazione numerica cercata è il rapporto della larghezza di ogni fila di mattonelle con la larghezza della fila precedente. Senza dare dimostrazione come al solito – ma senza il procedimento di calcolo e senza restituzione grafica, contrariamente alle sue abitudini – Piero sciorina due successioni di numeri, la prima 105, 84, 70, 60, la seconda 84, 72, 63, 56. Nel contempo, parla dell'esistenza di "innumerabili" proporzioni: "sexquiquarta", "sexquiquinta", "sexquisexta", 4/5, 5/6, 6/7. Si può pensare ad un qualche legame con le dottrine numerologiche, sebbene Piero non fornisca il minimo spunto in tal senso. È invece più plausibile che voglia mostrare come l'indagine sul metodo prospettico possa avanzare sia "per forza di linee", sia "per forza di numeri". Una preoccupazione che in Piero diventa *programma* come enunciato nella dedica del *Libellus*, dove afferma di voler "portare le cose dei geometri presso gli aritmetici".
Vale la pena di esplicitare il disegno mancante di Piero (fig. 15). I casi da lui proposti sono due: il primo con mattonella larga 1 braccio alla distanza dall'occhio di 4 bracci, il secondo alla distanza di 6 bracci. In figura è rappresentato il primo caso, indicando con la lettera a la misura unitaria del braccio. Tracciate le linee di proiezione e individuate le rispettive intersezioni, valgono nel primo caso i rapporti: A'B'/AB = 4/5 a = 84/105; C'D'/CD = 5/6 a = 70/84; E'F'/EF = 6/7 a = 60/70. Se la distanza, anziché $4a$, fosse $6a$, varrebbero i rapporti: A'B'/AB = 6/7 a = 72/84; C'D'/CD = 7/8 a = 63/72; E'F'/EF = 8/9 a = 56/63.

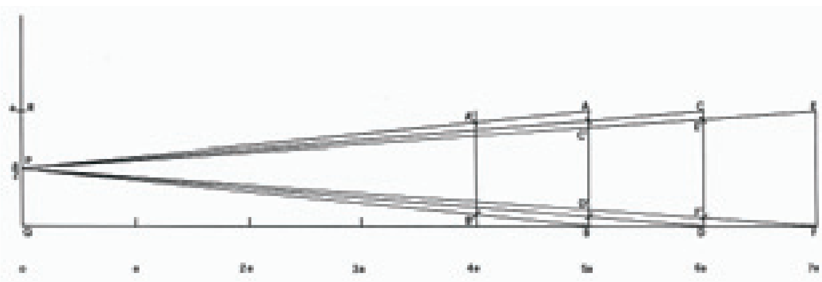
Fig. 15

Questo tipo di approccio è pittoricamente inutile ma interessante e ricco d'implicazioni matematiche, a conferma della "doppia identità" del nostro. Per esempio, si può osservare che i rapporti trovati non dipendono dalla posizione del punto di vista P sul segmento QR e anche che i rapporti procedono secondo la regola $n / (n + 1)$, $(n + 1) / (n + 2)$,… dove il primo termine della successione ha al numeratore il rapporto tra la distanza dall'occhio della prima mattonella e la larghezza della mattonella stessa, nei due casi 4 e 6.
Nel *De prospectiva* Piero compie un vero e proprio ribaltamento, che solo un matematico-pittore poteva fare. Ha studiato con attenzione l'*Ottica* di Euclide, che più volte cita e

utilizza a ragion veduta, ma – contrariamente ad una consolidata tradizione – la legge da pittore, cioè da persona che è interessata alla rappresentazione degli oggetti sul piano del quadro, anziché al fenomeno della visione. È un passaggio fondamentale che taglia fuori tutta una serie di domande: cos'è la luce? si vedono gli oggetti o la luce? Come la luce viene irradiata dagli oggetti? Come mai i raggi di luce hanno diversi colori? come vediamo l'immagine di qualcosa? perché alcuni vedono bene e altri no?

Interesse ben maggiore ottiene la questione se, e in che misura, la rappresentazione prospettica restituisca le effettive proporzioni degli oggetti. Nelle proposizioni XXX del primo libro e XII del secondo libro, Piero esamina due casi in cui, applicando le regole prospettiche ad un pavimento e a un colonnato, le mattonelle e le colonne più lontane avrebbero sul quadro dimensioni maggiori di quelle più vicine. Tramite considerazioni geometriche, non sempre esatte, giunge alla conclusione che l'angolo visuale del pittore non deve superare i 60°. Piero supera così l'annosa questione della compatibilità tra gli oggetti della Matematica e quelli reali, tra le linee astratte della Geometria e quelle materiali dei pittori; prende atto delle discrepanze che la procedura prospettica comporta e giunge alla conclusione che il tracciato prospettico non rispecchia la realtà, ma intrattiene con essa connessioni individuabili e trattabili matematicamente.

La prospettiva nasce come tecnica di bottega. Come tale, compare nel *De pictura* dell'Alberti. È Piero a darne la prima formulazione matematica, utilizzando Euclide. Piero matematico-pittore rende la prospettiva autocosciente.

Come ulteriore prova di questa presa di consapevolezza, si può ricordare la magnifica rappresentazione dell'icosaedro inscritto nel cubo inserita nel *Libellus*, laddove Piero adotta la rappresentazione assonometria, anziché prospettica, ritenendola giustamente più significativa e più adeguata alle proprietà geometriche delle figure.

Due rilievi finali

Valutando nel suo complesso l'opera di Piero, ci sembra che il nostro pittore-matematico non rientri nella categoria dell'*uomo universale* e del *genio poliedrico* del Rinascimento. Figura piuttosto come uno *specialista* nei settori della pittura e della Matematica che, diversamente da un Francesco di Giorgio o da un Leonardo, non ha lasciato disegni di macchine, studi di anatomia, nessun progetto architettonico, idraulico, niente rilievi topografici, e cose simili. Settori ai quali sembra del tutto estraneo mentre, rispetto ai due sopraccitati autori, mostra un talento matematico nettamente superiore sia per la difficoltà dei temi affrontati, sia per il rigore della trattazione.

Crediamo più aderente alla realtà storica considerare Piero come uno dei primissimi tecnici. Tali erano per formazione i pittori che seppero diventare scienziati, fenomeno questo – insieme a quello inverso di scienziati che si aprirono alle tecniche – che costituì uno dei principali motori della rivoluzione scientifica. ■

Bibliografia

Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*, a cura di G. Nicco Fasola, Firenze 1942.

Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*, a cura di G. Arrighi, Pisa 1970.

Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, edizione nazionale, Firenze 1995.

AA.VV., *Piero della Francesca tra arte e scienza*, Atti del Convegno internazionale di studi, Arezzo-Sansepolcro 8-12 ottobre 1992, a cura di M. Dalai Emiliani e V. Curzi, Venezia 1996.

E. Gamba, V. Montebelli, *Piero della Francesca matematico*, Le Scienze, n. 331, 1996.

J. V. Field, *Piero della Francesca a mathematician's art*, Yale University Press, New Haven and London 2005.

Note

[1] Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, corredato della versione volgare di Luca Pacioli, Edizione nazionale, Firenze 1995, pp. 143-146: "Est quaedam columna rotonda ad circinum cuius dyameter est 4 brachiorum idest cuiuslibet eius basis et alia columna eiusdem grossiti iortogonaliter perforat. Quaeritur quae quantitas auferatur a prima columna per ispum foramen."

[2] La figura 1 è in assonometria cavaliera. Le figure 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, sono in assonometria dimetrica.

[3] In simbolismo moderno, indicando con d il diametro del cilindro, risulta:

$$\frac{Area(ABCD)}{Area(TVXY)} = \frac{d^2}{d \cdot d\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e}$$

$$\frac{Area(cerchio)}{Area(ellisse)} = \frac{\pi \cdot \frac{d^2}{4}}{\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La (2) si ottiene dalla (1) permutando i medi e invertendo il 1° termine con il 2° e il 3° con il 4°.

[4] $$\frac{Area(KLM)}{Area(RPQ)} = \frac{d\,\frac{d}{2}\,\frac{1}{2}}{d\,\sqrt{2}\,\frac{d}{2}\,\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Area(ABCD)}{Area(TVXY)}\ .$$

La (4) si ottiene dalla (3) permutando i medi.

[5] Dalla (3) e dalla (1),

$$\frac{Area(KLM)}{Area(RPQ)} = \frac{Area(ABCD)}{Area(TVXY)} = \frac{Area(cerchio)}{Area(ellisse)}$$; ne segue

$$\frac{Area(KLM)}{Area(RPQ)} = \frac{Area(cerchio)}{Area(ellisse)}$$ e quindi, permutando i medi, la (5).

[6] Nella prefazione, Archimede enuncia il teorema nel modo seguente: " Se si inscrive in un cubo un cilindro aventi le basi in due facce opposte e la superficie laterale tangente alle altre quattro facce e poi un altro cilindro con le basi in altre due facce opposte del cubo e la superficie laterale tangente alle altre quattro facce, il volume del solido limitato dalle due superfici cilindriche, intersezione dei due cilindri, è 2/3 del cubo." *Archimedes Opera omnia cum commentariis Eutocii*, ed. Heiberg, Vol. II, *Archimedis De mechanicis propositionibus ad Eratosthenem methodus*, pp. 427-429.

[7] "Lo stesso Archimede dimostra nello stesso libro [nel *Metodo*] che se in un cubo vengono posti due cilindri che si compenetrano e sono tangenti alle facce del cubo, il segmento comune dei cilindri sarà i 2/3 del cubo". *Heron Alexandrinus Opera*, III, ed. H. Schoene, II, XV, p. 133.

[8] L.B. Alberti, *L'architettura* [*De re aedificatoria*], testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi, Edizioni Il Polifilo, Milano 1966, Tomo I, pp. 240-250.

[9] Piero della Francesca, *Libellus,* cit., pp. 146-147: "Est quaedam testudo seu volta per modum crucis, quae est pro qualibet facie 8 brachia et in altitudine 4 brachia tam in summinate arcuum quam in medio voltae. Quaeritur de superficie concava."

[10] Indicando con r il raggio del cerchio sezione si ha che

$$\frac{Area\ (quadrato)}{Perimetro\ (quadrato)} = \frac{4r^2}{8r} = \frac{r}{2};\quad \frac{Area\ (cerchio)}{Perimetro\ (circonferenza)} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2};$$

quindi vale la relazione (9)

[11] Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*, dal Codice Ashburnhamiano 280 della Bibliolteca Medicea Laurenziana di Firenze, a cura e con introduzione di Gino Arrighi, Domus Galilaeana, Pisa, 1970, p. 86.

[12] Ibid., pp. 139-141.

[13] M° Gilio, *Questioni d'algebra*, a cura e con introduzione di R.Franci, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, Siena, 1983, pp. 30-33

[14] Paolo Gherardi, *Opera Matematica*, a cura di G.Arrighi, Lucca, Pacini Fazzi, 1987, pp. 104-105.

[15] Matteo di Nicolo' Cerretani, *libro dirittamente di ragioni*, ms della Collezione Baldovinetti, Bald. 229 della Biblioteca Nazionale di Firenze, cc. 74r-v, 75r.

[16] Mariotto di Giovanni Guiducci, *Libro d'Arismetrica*, Biblioteca Nazionale di Firenze, Conv. Soppr. I. 10. 36., cc. 149r-v

[17] M° Benedetto da Firenze, *Trattato di praticha d'arismetrica*, ms L. IV. 21 della Biblioteca Comunale di Siena, c. 430v.

[18] Luca Pacioli, *Summa de Aritmetica Geometria Proportioni et Proportionalità*, Venezia 1494, f.150r.

[19] Piero della Francesca, *Trattato d'abaco*, cit., pp. 87, 91.

[20] Ibid., pp. 146, 147, 166.

[21] M° Dardi, *Aliabraa Argibra*, dal manoscritto I. VII. 17 della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di Raffaella Franci, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale, Siena, 2001, pp.269-270.

[22] Il *LiberAbbaci* di Leonardo Pisano pubblicato secondo la lezione del Codice Magliabechiano (...) da Baldassarre Boncompagni, Roma 1857, pp.399-400.

[23] M° Dardi, cit., pp. 270-272.

[24] cfr. note 11 e 12.

[25] L. Pacioli, Summa, cit., f. 178 r-v.

[26] Ibid. f. 182r.

[27] Per una trattazione più approfondita cfr. E. GIUSTI, *L'algebra nel Trattato d'abaco di Piero della Francesca: osservazioni e congetture*, in Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, vol. XI (1991) fasc. 2, pp.55-83.

[28] Piero della Francesca, *Trattato d'abaco,*cit., pp. 261-265

[29] Ibid., p. 263

[30] L. Pisano, *Liber quadratorum,* codice E.75 Parte Superiore della Biblioteca Ambrosiana di Milano. Nel seguito faremo riferimento all'edizione francese di Paul Ver Eecke, *Léonard de Pise, Le livre des nombres carrés, traduit pour la première fois du latin médiéval en français,* Paris 1952.

[31] *Léonard de Pise, Le livre des nombres carrés,* cit., p. 30

[32] Ibid., p. 43

[33] Ibid., p. 47

[34] *Il libro dei quadrati di Leonardo Pisano e i problemi di analisi indeterminata nel Codice Palatino 577 della Biblioteca di Firenze*, Introduzione e commenti di Ettore Picutti, Leo S. Olschki Editore, Firenze, in Physis, Anno XXI - 1979, cc. 252r - 292r

[35] *Il libro dei quadrati di Leonardo Pisano*, cit. pp. 250-251. Da c. 276r a c. 277v sono trovati i numeri congruenti dei congrui seguenti: 30, 5, 6, 15, 21, 14, 20, 34, 39, 70, 65, 41, 13, 31, 37, 210, 110, 22, 72 4/5. Anche nel Codice L.IV.21 della Biblioteca degli Intronati di Siena sono calcolati i congrui di 6 e 30.

[36] Piero della Francesca, *Trattato d'abaco,* cit., p. 264

[37] Ibid., p. 264

[38] *Léonard de Pise, Le livre des nombres carrés,* cit., p. 61

[39] Il libro dei quadrati di Leonardo Pisano, cit., pp.267-268